FD-2710

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-II)
Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - III

Mechanics

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) दो बराबर भार P और P, दो डोरियों ACP और BCP से बंधे हुए हैं, जो एक चिकनी खूँटी के ऊपर जाती हैं। AB एक भारी दण्ड है जिसका भार W है और जिसका गुरुत्व केन्द्र A से a फीट और B से b फीट है।

दर्शाइए कि AB क्षैतिज से कोण

$$\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$$

बनाती है।

Equal weights P and P are attached to two strings ACP and BCP passing over a smooth peg C. AB is a heavy beam of weight W, whose centre of gravity is a feet from A and b feet from B, show that AB is inclined to the horizon at an angle.

$$\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$$

(*b*) एक ठोस गोला उससे दुगुनी त्रिज्या के एक स्थिर रूक्ष अर्द्ध-गोल प्याले के अन्दर रखा हुआ है। दर्शाइए कि गोल के उच्चतम बिन्दु से कितना ही बड़ा वजनी एक भार संबंधित कर दिया जाये, साम्यावस्था स्थायी रहती है।

A solid sphere rests inside a fixed rough hemispherical bowl of twice its radius. Show that, however large a weight is attached to, the highest point of the sphere, the equilibrium is stable.

(*c*) दो बराबर एकसमान छड़ें AB और AC प्रत्येक की लम्बाई $2p$ है, A पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुए हैं और त्रिज्या a के एक चिकने उर्ध्वाधर वृत पर

विराम में है। दर्शाइए कि यदि उनके बीच का कोण 2θ हो, तो

$$b \sin^3\theta = a \cos\theta$$

Two equal uniform rods AB and AC, each of length $2p$, are freely joined at A and rest on a smooth vertical circle of radius a. Show that if 2θ be the angle between them, then

$$b \sin^3\theta = a \cos\theta.$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) डायनमे (X, Y, Z, L, M, N) के लिए समतल $x + y + z = 0$ के शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए।

Find the null point of the plane $x + y + z = 0$ for the dyname (X, Y, Z, L, M, N).

(*b*) दो बल एक रेखा $y = 0$, $z = 0$ के अनुदिश तथा दूसरी रेखा $x = 0$, $z = c$ के अनुदिश लगता है। चूँकि बल बदल रहे हैं, तो दर्शाइए कि इनके समतुल्य, जहाँ l, l' डोरियों की प्राकृतिक लम्बाइयों के ऊपर उनके विस्तार हैं। मरोड़ के अक्ष द्वारा जनित पृष्ठ $(x^2 + y^2)\, z = cy^2$ है।

Two forces act, one along the line $y = 0$, $z = 0$ and the other along the line $x = 0, z = c$. Since the forces are changing, show that their equivalents, where l, l' is the extension over the natural lengths of the strings. Surface generated by the central axis is $(x^2 + y^2)\, z = cy^2$.

(*c*) दर्शाइए कि किसी भी बल-निकाय की शून्य रेखाओं में से चार किसी अतिपरवलय के जनक होते हैं, दो जनकों के एक निकाय के सदस्य होते हैं। और दो अन्य निकाय के।

Show that among the null lines of any system of forces four are generators at any hyperboloid, two belonging to one system of generators and two to the other system.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) एक सरल रेखा में सरल आवर्त गति करते हुए एक बिन्दु के वेग v_1 तथा v_2 हैं जबकि इसकी केन्द्र से दूरियाँ x_1 तथा x_2 हैं। दर्शाइए कि गति का आवर्तकाल है :

$$2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

A point in a straight line with S.H.M. has velocities v_1 and v_2 when its distance from the centre are x_1 and x_2. Show that the period of motion is

$$2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

(*b*) चिकनी मेज पर दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा में m द्रव्यमान का एक कण सरल आवर्त गति (S.H.M.) में गतिमान है और इन बिन्दुओं से यह प्रत्यास्थ डोरियों से बंधा है, जिनका साम्यावस्था में प्रत्येक का तनाव T है। दर्शाइए कि एक दोलन का समय है

$$2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$$

जहाँ l, l' अपनी प्राकृतिक लम्बाई से परे डोरियों का विस्तार है।

A particle of mass m execute S.H.M. in the line joining the points A and B on the smooth table and is connected with these points by elastic strings whose tension in equilibrium are each T. Show that the time of an oscillation is $2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$ where l, l' are the extensions of the strings beyond their natural lengths.

(*c*) एक बिन्दु P, O के सापेक्ष अचर कोणीय वेग से समान कोणिक सर्पिल $r = ae^{\theta}$ पर गतिमान है, जहाँ $r - ae^{\theta}$ सर्पिल का ध्रुव है। P का त्रिज्या और अनुप्रस्थ त्वरण ज्ञात कीजिए।

A point P moving, with constant angular velocity about O, the equiangular spiral $r = ae^{\theta}$, O being the pole of the spiral. Obtain the radial and transverse accelerations of P.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सूर्य की परिक्रमा करने वाले किसी ग्रह का महत्तम तथा न्यूनतम वेग क्रमशः 30 और 29.2 किमी० प्रति सेकेण्ड है। उसकी कक्षा की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

The maximum and minimum velocities of a planet revolving around the sun are 30 and 29.2 km/sec respectively. Find the eccentricity of its orbit.

(*b*) एक कण समतल $p^2 = ar$ पर इसकी नाभि के सापेक्ष एक समान कोणीय वेग से भ्रमण करता है, तो सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर अभिलाम्बिक त्वरण, वक्रता त्रिज्या के समानुपाती होता है।

A particle is moving in a parabola $p^2 = ar$ with uniform angular velocity about the focus, prove that its normal acceleration at any point is proportional to the radius of curvature of its path at that point.

(*c*) एक मनका एक रूक्ष वक्राकार तार पर इस प्रकार गतिमान है कि इसकी दिशा में परिवर्तन अचर कोणीय वेग से होता है। दर्शाइए कि वक्र के सम्भावित रूप एकसमान कोणीय सर्पिल होगा।

A bead moves along a rough curved wire which is such that it changes its direction of motion with constant angular velocity. Show that a possible form of wire is an equiangular spiral.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) कोई कण किसी चिकने क्षैतिज समतल के अनुगत वेग V से प्रक्षिप्त किया जाता है, माध्यम का अवरोध प्रति इकाई द्रव्यमान वेग के घन का μ गुणा है। दर्शाइए कि कण द्वारा t समय में चली दूरी $\frac{1}{\mu V}\left[\sqrt{\left(1+2\mu V^2 t\right)}-1\right]$ है और तब इसका वेग $\frac{V}{\sqrt{1+2\mu V^2 t}}$ है।

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a medium whose resistance per unit mass is μ times the cube of the velocity. Show that the distance it describes in time t is

$\frac{1}{\mu V}\left[\sqrt{\left(1+2\mu V^2 t\right)}-1\right]$ and that its velocity then is $\frac{V}{\sqrt{1+2\mu V^2 t}}$.

(*b*) वर्षा की एक बूँद, जो स्वतंत्रतापूर्वक गिर रही है, प्रत्येक क्षण आयतन में एक वृद्धि, जो क्षण पृष्ठ का λ गुणा है, ग्रहण करती है, t समय पश्चात वेग ज्ञात कीजिए तथा t समय में गिरी हुई दूरी भी ज्ञात कीजिए।

A spherical raindrop, falling freely, receives m each instant an increase of volume equal to λ times its surface at that instant, find the velocity at the end of times t, and the distance fallen through in that time.

(*c*) एक कण एक चिकने गोले पर केवल पृष्ठ के दबाव के अन्तर्गत (अन्य कोई बल नहीं) गतिमान है। दर्शाइए कि इसका पथ समीकरण $\cot\theta = \cot\beta\cos\phi$ द्वारा प्राप्त होगा, जहाँ θ और ϕ कण के कोणीय निर्देशांक हैं।

A particle moves on a smooth sphere under no forces except the pressure of the surface, show that its path is given by the equation $\cot\theta = \cot\beta\cos\phi$ where θ and ϕ are its angular coordinates.

———